

Задания III тура
Открытой международной студенческой
Интернет-олимпиады по математике (2019 год)

Задание 1

Карлсон съедает банку варенья за 14 минут, а вместе со своим другом Малышом они съедают такую же банку варенья за 10 минут. За сколько минут съест банку варенья один Малыш?

Ответ: за 35 мин.

Задание 2

При каких натуральных n функция $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

а) имеет производную в нуле;

б) имеет непрерывную производную в нуле?

Ответ: а) при $n \geq 2$; б) при $n \geq 4$.

Задание 3

Букмекерская контора принимает ставки на результат футбольного матча. На победу первой команды ставки принимаются из расчета 4:1 (это значит, что если первая команда побеждает, то ставившему возвращают в четыре раза больше, чем поставленные деньги; в противном случае он теряет поставленные деньги), на победу второй команды – 3:1, на ничью в футбольном матче – $k:1$.

При каком наименьшем целом k можно будет так распределить ставки на результат футбольного матча, что при любом исходе остаться в выигрыше?

Ответ: 3

Задание 4

Доказать, что уравнение $x^n = x + n$ при каждом натуральном n ($n > 1$) имеет ровно один корень x_n^0 на отрезке $[1; 2]$. Найти предел последовательности этих корней при $n \rightarrow \infty$.

Ответ: 1

Задание 5

Пусть φ_{ij} – двугранный угол между i -ой и j -ой гранями треугольной пирамиды. Найти определитель матрицы $A_{4 \times 4} = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos \varphi_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ -1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Ответ: 0

Задание 6

Дан правильный n -угольник $A_0 A_1 \dots A_{2k}$ ($n = 2k + 1$) и описанная около него окружность. Доказать, что если M – произвольная точка дуги $A_0 A_{2k}$, то $MA_0 + MA_2 + \dots + MA_{2k-2} + MA_{2k} = MA_1 + MA_3 + \dots + MA_{2k-3} + MA_{2k-1}$.

Задание 7

Дана последовательность чисел $a_n = 2^n - 1$. Докажите, что

а) число $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2019}$ является делителем числа $a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{n+2019}$ для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$;

б) отношение $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2019}}{2019!}$ является двоично-рациональным числом (то есть рациональным числом A , со знаменателем являющимся степенью двойки: $A = \frac{a}{2^b}$, $a, b \in \mathbb{N}$).

Задание 8

Вершина трехгранного угла находится в центре правильного тетраэдра, а ребра проходят через вершины тетраэдра. В вершине трехгранного угла находится источник света, который полностью освещает этот трехгранный угол (и только его). Можно ли при этом повернуть трехгранный угол так, чтобы были полностью освещены хотя бы две вершины тетраэдра (находились бы во внутренней освещенной области)?

Ответ: Можно

Задание 9

Каждый вечер некоторые из n дам устраивают прием, а остальные ходят на прием к тем дамам, которые в этот вечер принимают (т.е. остальные дамы могут посетить все приемы, которые устраиваются в этот вечер). Каково минимальное число вечеров, при котором каждая дама попала бы на прием к каждой?

Ответ: Если m – минимальное число вечеров, при котором каждая дама попала бы на прием к каждой, то m есть такое минимальное целое, что $C_m^{[m/2]} \geq n$.

Задание 10

Даны три прямые на плоскости. Рассматриваются все такие равносторонние треугольники, вершины которых лежат на всех трех прямых. Найти множество их центров.