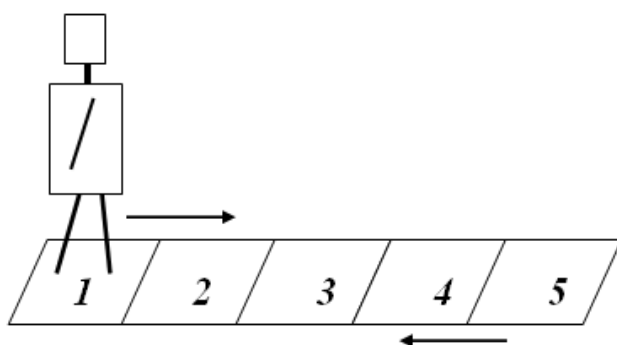


**Задания III тура**  
**Открытой международной студенческой**  
**Интернет-олимпиады по математике (2021 год)**

**Задание 1**

Робот шагает по пронумерованным от 1 до 5 квадратам. С квадрата на квадрат он переходит за один шаг (смотри рисунок). Он начинает идти от квадрата 1, доходит до квадрата 5, разворачивается и идет от квадрата 5 к квадрату 1, разворачивается на квадрате 1 и снова идет к квадрату 5 и так далее. Из-за недостаточного заряда аккумулятора робот остановился на 2021 шаге. На квадрате с каким номером он остановился?



**Ответ:** на квадрате номер 4.

**Задание 2**

Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$  на сходимость.

**Ответ:** Ряд расходится.

**Задание 3**

Дана матрица  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1024 \\ x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющая уравнению  $X^{2021} = X$ .

Найти все возможные значения  $x$ .

**Ответ:**  $x = \pm \frac{1}{1024}$ .

**Задание 4**

Известно, что функция  $f(x)$  дифференцируема при  $x \in [0, +\infty)$ . Кроме того  $|f(x)| \leq 10$  и  $f(x) \cdot f'(x) \geq \cos x$  для всех  $x \geq 0$ . Существует ли предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?

**Ответ:** нет.

### Задание 5

Найти все вещественные решения уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^n}{ne^{nx}} = x.$$

**Ответ:**  $x \in [-\ln 2; +\infty)$ .

### Задание 6

Пусть  $X_{n \times k}$  – матрица, причем  $X^* X = I_k, n \geq k$ ,

где  $X^*$  – сопряженная матрица по отношению к  $X$ ;  $I_k$  – единичная матрица порядка  $k$ .

Для  $x$  – ненулевой строки матрицы  $X$  доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) строка  $x$  не является линейной комбинацией никаких других строк матрицы  $X$ ;

б) строка  $x$  является нормированной ( $xx^* = 1$ );

в) строка  $x$  ортогональна другим строкам матрицы  $X$  (строки  $x$  и  $y$  ортогональны, если  $xy^* = 0$ ).

(Пусть дана матрица  $A$ , элементами которой являются комплексные числа. Сопряженной матрицей  $A^*$  называется матрица, получаемая в результате транспонирования матрицы  $A$  и замены каждого элемента транспонированной матрицы  $A^T$  комплексно-сопряженными числами).

### Задание 7

Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x-x^2} dx$ .

**Ответ:**  $-\frac{\pi^2}{9}$ .

### Задание 8

Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не делится на 2021, столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы целых положительных слагаемых, каждое из которых входит в сумму не более 2020 раз.

### Задание 9

Докажите, что сумма расстояний от точки внутри тетраэдра до его граней меньше трети суммы длин ребер тетраэдра.

### *Задание 10*

Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров, а за 7 проверок их всегда можно обнаружить.