Задания III тура
Открытой международной студенческой
Интернет-олимпиады по математике (2022 год)

Задание 1

Пройдя 9/20 длины моста, пешеход оглянулся назад и увидел приближающийся к мосту автомобиль. Если пешеход пойдет назад, то он встретится с автомобилем в начале моста, а если продолжит идти вперед, то автомобиль догонит его в конце моста. Во сколько раз скорость автомобиля больше скорости пешехода?
(Автомобиль и пешеход все время двигаются с постоянными скоростями.)
Ответ: в 10 раз.

Задание 2

Решить уравнение $\cos x = \sin x + \frac{\pi}{4}$, где $0 \le x \le 2\pi$.

Ответ: $x_1 = \arccos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right) - \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4} - \arccos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$.

Задание 3

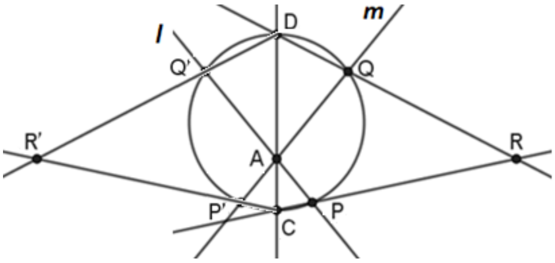
Даны три действительные матрицы A, B и C одинакового размера $n \times m$. Доказать, что
$tr(A(A^T - B^T) + B(B^T - C^T) + C(C^T - A^T)) \ge 0$.
(trA – след матрицы A, сумма диагональных элементов этой матрицы).

Задание 4

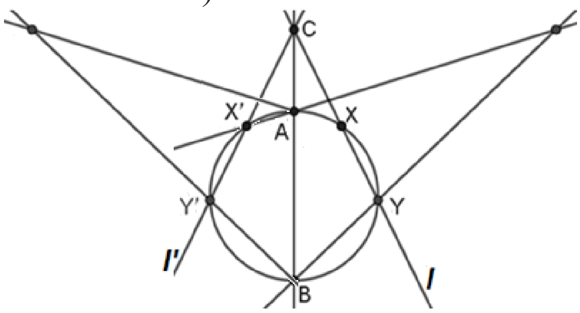
a) Дана окружность O с диаметром CD и точка A на нем. Через точку A проведены две прямые l и m, симметричные относительно диаметра CD. P и P', Q и Q' – симметричные относительно CD точки пересечения этих прямых и окружности ($l = PQ'$, $m = P'Q$). R – точка пересечения CP и DQ, R' – CP' и DQ'. Докажите, что точки R, A и R' лежат на одной прямой.

b) Пусть AB – диаметр окружности. C –точка на его продолжении. l и l' – симметричные относительно AB прямые, проходящие через точку C. X, X', Y, Y' – соответствующие симметричные пары точек пересечения l и l' с окружностью. Докажите, что точки пересечения прямых AX и BY', AX' и BY, а также точка C лежат на одной прямой.

a)



b)



Задание 5

Решить уравнение $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\ldots+\sqrt{x^n}}}}}=2$.

Ответ: 4.

Задание 6

Любой ли треугольник можно перегнуть по средним линиям так, чтобы получился тетраэдр (не обязательно правильный)?

Ответ: нет.

Задание 7

Найти значение интеграла $\int\limits_{2021}^{2022}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln\left(\dfrac{x}{2021}\right)\cdot\ln\left(\dfrac{2022}{x}\right)}}$.

Ответ: π.

Задание 8

a) Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде конечной суммы попарно различных чисел вида $\dfrac{1}{n}$, $n\in N$.

b) Верно ли, что любое рациональное число из интервала $(0;0{,}1)$ представимо в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{2022}\dfrac{1}{n_i}$?

Ответ: b) нет.

Задание 9

Двое играют в следующую игру на n-элементном множестве. Первый проводит одно красное ребро, второй – 100 синих. Цель первого – создать полный красный подграф на 2022 вершинах.

Докажите, что если n достаточно велико, то он может это сделать.

Задание 10

Дан круг радиуса $R > 2$, на границе которого нет точек целочисленной решетки. Докажите, что внешних граничных точек решетки на 4 больше, чем внутренних.

Под граничной точкой понимается точка решетки, имеющая соседа, находящегося по другую сторону от границы. У каждой точки решетки имеются 4 соседа – верхний, нижний, левый, правый.