

Задания III тура
Открытой международной студенческой
Интернет-олимпиады по математике (2023 год)

Задание 1

В игровом зале за 5 долларов дают 3 жетона для игры и одну конфету в подарок. При возврате двух неиспользованных жетонов для игры возвращают 3 доллара и дают еще конфету в подарок. Производятся только такие обмены. У зашедшего в игровую комнату мальчика имелись только доллары. В результате проведенных обменов у него уменьшилось количество долларов, но появилось ровно 50 конфет (жетонов не оказалось). Сколько долларов мальчик потратил на эти 50 конфет?

Ответ: 10.

Задание 2

Пусть x_0 – точка локального экстремума дважды дифференцируемой функции $f(x)$. Известно, что для всех x выполняется равенство $f'(x) = 1 - xf^2(x)$. Определить, является точка x_0 точкой минимума или точкой максимума.

Ответ: x_0 – точка максимума.

Задание 3

Для любой точки N квадрата Q с вершинами в точках $(100;100), (-100;100), (-100;-100), (100;-100)$ и любой точки M фигуры F скалярное произведение векторов $\overline{ON}$ и $\overline{OM}$ не превосходит 100 ($\overline{ON} \cdot \overline{OM} \leq 100$), здесь точка O – начало координат. Найти площадь фигуры F .

Ответ: 2.

Задание 4

Сколько существует способов расставить по четыре элемента каждого из четырех различных типов по клеткам клетчатой доски 4×4 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стоял ровно один элемент каждого типа?

Ответ: 576.

Задание 5

Функция $f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f(x) + \frac{1}{2} \sin f(x) = x$.

Найти значение интеграла $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{2} - 1$.

Задание 6

В пространстве задан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC . Пусть $A_1B_1C_1$ – его ортогональная проекция на некоторую плоскость (A_1 – проекция точки A , B_1 – проекция точки B , C_1 – проекция точки C). Известно, что $A_1B_1C_1$ также является равнобедренным прямоугольным треугольником. Найти все возможные значения отношения длины катета AB к длине катета A_1B_1 .

Ответ: $1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задание 7

Даны квадратные матрицы A и B такие, что $B^2 = 0$ и $A^2B + BA^2 = 2A^3$. Доказать, что для любых таких матриц $A^{12} = 0$.

Задание 8

Даны три положительных числа a, b, c такие, что $\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \frac{3}{\pi} \cdot abc$.

Доказать, что $a + b + c > \frac{\pi}{6}$.

Задание 9

N человек имеют по некоторому количеству яблок ($N > 2$). Первый человек взял из своих яблок половину и еще одно яблоко и разделил эти яблоки поровну между остальными. Затем так же последовательно поступают и остальные (каждый берет половину всех накопившихся у него яблок и еще одно яблоко и делит эти яблоки поровну между остальными). В результате у всех оказалось по a яблок. Известно, что все яблоки остались целыми. Каким наименьшим (в зависимости от N) может быть a ?

Ответ: $a = (N - 1)^N - 2$.

Задание 10

Дан многочлен с целыми коэффициентами $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Известно, что a_n – нечетное число и $P_n(k), P_n(k+1)$ – нечетные числа для некоторого целого k . Доказать, что этот многочлен рациональных корней не имеет.