## Задания (Индивидуальное первенство)

### Задание 1

Два повара получили задание очистить 8 кг картошки и 8 кг морковки. Первый повар за 1 час чистит либо 3 кг картошки, либо 5 кг морковки. А второй повар за 1 час чистит либо 2 кг картошки, либо 4 кг морковки. За какое наименьшее время повара справятся с заданием?
**Ответ:** 2 часа 24 минуты.

### Задание 2

Дан многочлен $P_n(x)$ степени $n$ и точка $M$. Докажите, что к графику многочлена $P_n(x)$ из точки $M$ можно провести не более чем $n$ касательных.

### Задание 3

Дана дифференцируемая на всей числовой оси функция $f(x) > 0$ такая, что $f'(x) = f(x+a)$ при всех $x$. Найти наибольшее возможное значение $\ln a$.
**Ответ:** -1.

### Задание 4

В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов параллелограмма $AM$ и $BN$ пересекаются в точке $O$ (точки $M$ и $N$ лежат на сторонах $BC$ и $AD$ соответственно). Во сколько раз площадь пятиугольника $OMCDN$ больше площади треугольника $AOB$, если $\frac{BC}{AB} = 3$?

**Ответ:** в 9 раз.

### Задание 5

**а)** Сколько плоскостей нужно построить, чтобы разрезать все ребра куба?
**б)** Сколько плоскостей потребуется, чтобы разрезать каждое ребро куба дважды?
Замечание. Мы говорим, что плоскость разрезает отрезок, если плоскость содержит ровно одну внутреннюю точку этого отрезка.
**Ответ**: **а)** 3, **б)** 4

### Задание 6

Дана невырожденная матрица размером $n \times n$. Известно, что элементы этой матрицы являются целыми числами и каждый нечетный элемент матрицы равен количеству нечетных элементов в строке матрицы, содержащей этот элемент, а каждый четный элемент матрицы равен количеству четных элементов в столбце матрицы, содержащей этот элемент. Доказать, что при любом $n \geq 3$ существует хотя бы одна такая матрица.

### Задание 7

На бесконечной пустой шахматной доске помещается прямоугольник из m×n фигур (см. рисунок). Разрешен один тип операции: фигура может перепрыгнуть через фигуру в соседней ячейке на следующую за ней ячейку, которая должна быть свободной, а затем фигура, над которой она перепрыгнула, удаляется.

Под соседними ячейками мы подразумеваем ячейки с общей стороной (допускаются ходы только по вертикали или горизонтали).
Цель игры состоит в том, чтобы оставить на доске только одну фигуру. Для каких m, n это возможно?


**Ответ:** Когда оба m, n равны >1 и не делятся на 3, или когда они равны 1 и 2.

### Задание 8

Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n})-n\int\limits_{0}^{1}\sin x dx\right)$.

**Ответ:** $\frac{1}{2}\sin 1$**.**

### Задание 9

Обозначим через $W$ множество всех натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит нулей.

Найти все действительные числа $\alpha>0$ такие, что ряд $\sum\limits_{n\in W}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится.

**Ответ:** $\alpha>\log_{10}9$.

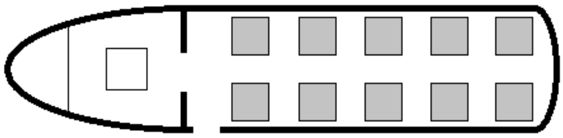
### Задание 10

Пусть $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ – перестановка чисел $1,2,\ldots,n$, где $n>2$. Докажите, что найдутся различные номера $k$ и $l$ для которых разность $ka_k-la_l$ кратна $n$.

## Задания (Командное первенство)

### Задание 1

8 туристов общей массой 1000 кг садятся в небольшой самолет. Каждый турист весит не более $A$ кг. По правилам безопасности, массы пассажиров, сидящих по правому борту и по левому борту, должны отличаться не более чем на 100 кг. При каком наибольшем $A$ наверняка можно рассадить туристов в соответствии с этими правилами?



**Ответ:** 137,5

### Задание 2

Граф из 10 вершин не содержит 3 вершин, смежных друг с другом (граф без треугольников). Найти наибольшее возможное количество ребер у такого графа.
**Ответ:** 25.

### Задание 3

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – неотрицательные, дифференцируемые на интервале $x \in (-\infty, 0]$ функции. Известно, что для всех $x \le 0$ выполняется неравенство $\min\limits_{x\le 0}(f'(x), g'(x)) \ge f(x)g(x)$. Доказать, что или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, или $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

### Задание 4

В треугольнике $ABC$ с радиусом описанной окружности $R$ сторона $BC > AB$ и равна $BC = \dfrac{AB + AC}{2}$. Известно также, что отношение $\dfrac{R}{AB - AC}$ имеет наименьшее возможное значение для всех таких треугольников. Найти значение выражения $\dfrac{BC}{AC - BC}$.

**Ответ:** $\sqrt{7}$.

### Задание 5

Дан многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ с действительными коэффициентами, который не имеет действительных корней на интервале $(0;1)$. Докажите, что для любого такого многочлена функция $f(y) = \dfrac{a_n}{n+y} + \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)+y} + \ldots + \dfrac{a_1}{1+y} + \dfrac{a_0}{y}$ не имеет корней на интервале $(0;+\infty)$.

### Задание 6

Дана квадратная матрица $B$ порядка $n = 2023$ такая, что $B^2 = \dfrac{1}{2}B$ и $\det(B+E)\cdot\det(2B-3E) \ne 0$, где $E$ – единичная матрица. Пусть для невырожденной

матрицы $X$ выполняется равенство $10X^{-1} = 2 \cdot (3E - 2B)^{-1} + (B + E)^{-1}$, где $X^{-1}$ – обратная к $X$ матрица. Найти сумму всех элементов матрицы $X$.
**Ответ:** 12138.

### Задание 7

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n > 0$ – арифметическая прогрессия. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n}$.

**Ответ:** $\dfrac{2}{e}$.

### Задание 8

Все точки некоторого треугольника, заданного в 11-мерном пространстве, не выходят за границы 11-мерного единичного куба. Найти максимально возможный периметр этого треугольника.
**Ответ:** $2(\sqrt{2} + \sqrt{7})$.